INTEGRALSÄTZE

Wir machen uns die Prinzipien der in der Feldtheorie unverzichtbaren Integralsätze klar.

[P4] *Gaußscher Satz*
Aus einer Ladungsverteilung lässt sich das Feld bestimmen.

(a) Verwenden Sie den Gaußschen Satz, um das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für eine axialsymmetrische Ladungsverteilung der Form

$$\varrho(r_\perp) = \varrho_0\, \mathrm{e}^{-r_\perp/R}$$

zu berechnen. Hierbei sind ϱ_0 und $R > 0$ Konstanten und $r_\perp$ die Radialkomponente der Zylinderkoordinaten $r_\perp, \varphi, z$.

(b) Wie verhält sich das Feld für $r_\perp \to 0$? *Hinweis*: Entwicklung bis zur ersten Ordnung in $r_\perp$.

[P5] *Punktladungen*
Zeigen Sie die fundamentale Identität

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})\,,$$

wobei $\vec{r}$ der drei-dimensionale Ortsvektor und $r = |\vec{r}|$ sein Betrag ist. *Hinweis*: Den trivialen Teil der Behauptung ($\vec{r} \neq 0$) haben Sie bereits in [H1](b) gezeigt. Wie könnte Ihnen ein Integralsatz helfen, die Behauptung für $\vec{r} = 0$ zu zeigen?

[P6] *Stokesscher Satz*
Betrachten Sie das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ x^2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das Linienintegral $\oint_C \mathrm{d}\vec{r} \cdot A(\vec{r})$ für einen Kreis C mit Radius R, der in der xy-Ebene konzentrisch zum Ursprung liegt.

(b) Überprüfen Sie, dass der Stokessche Satz zum selben Ergebnis führt.